1. Sequências numéricas

1.1 Definição da sequência e exemplos

Definição 1.1.1 Se ao cado número natural n corresponde um número real x_n, diremos que

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \dots$$

formam uma *sequência*.

■ **Exemplo 1.1** Considere uma sequência $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. Neste caso temos

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

ou

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}.$$

■ **Exemplo 1.2** Ache uma formula genérica para o termo geral x_n da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, \frac{-4}{25}, \frac{5}{125}, \frac{-6}{625} \dots\right\}.$$

Solução. Seja $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. É obvio que $b_n = 5^n$ e

$$a_1 = 1+2,\ a_2 = -(2+2),\ a_3 = 3+2,\ a_4 = -(4+2), \dots$$

ou seja $a_n = (-1)^{n+1}(n+2)$. Portanto temos

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{5^n}.$$

;-)

■ **Exemplo 1.3** Seja $\{s_n\}$ com $s_n = \sum_{k=0}^{n} bt^k$, onde $t \neq 0; 1$, $\quad b \neq 0$. Mostre que

$$s_n = b\frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

Solução. Termo geral s_n tem forma

$$s_n = b(1+t+t^2+\cdots+t^n),$$

assim

$$s_n \cdot t = b(t+t^2+t^3+\cdots+t^{n+1}).$$

Ou seja

$$s_n - s_n \cdot t = s_n(1-t) = b(1-t^{n+1}).$$

Portanto $s_n = b\dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$. ;-)

1.2 Limites

■ **Exemplo 1.4** 1) Seja $x_n = \dfrac{1}{2^n}$. Analisando o comportamento dos elementos x_n, vimos que o termo x_n aproxima 0 (tende ao 0) quando n é suficientemente grande.

2) Seja $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Portanto temos

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad x_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$$

continuando as contas conferimos que x_n aproxima ou tende ao 1.

Definição 1.2.1
- Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ tem o *limite* $L \in \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n > n_0$. Neste caso escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ ou $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$.
- Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existir, sequência $\{x_n\}$ é dita *convergente*, caso contrário *divergente*.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ se e só se para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ (ou $x_n < -M$) para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n > n_0$. Neste caso diremos que sequência $\{x_n\}$ *diverge para* $\pm\infty$.

Obs

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se e só se x_n ficam na ε-vizinhança do L a partir do número $n_0 + 1$.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ se e só se x_n ficam à direita do M a partir do número $n_0 + 1$.

Teorema 1.2.1 Se o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existir, ele é único.

■ **Exemplo 1.5** 1) Seja $x_n = \frac{1}{5^n}$. Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0.$$

De fato, $|\frac{1}{5^n} - 0| < \varepsilon$ ou $\frac{1}{5^n} < \varepsilon$ para $n > \log_{\frac{1}{5}} \varepsilon$.

2) Se $x_n = e^n$, assim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. De fato, $e^n > M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n > \ln M$.

Definição 1.2.2 Seja $\{x_n\}$ uma sequência. Uma subsequência de $\{x_n\}$ é uma nova sequência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, onde $n_1 \geq 1$ e $n_{k+1} > n_k$.

■ **Exemplo 1.6** Dada a sequência $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Os elementos

$$x_{2k} = \frac{1}{2k+1}$$

formam uma subsequência de $\{x_n\}$ de todos termos positivos. Por outro lado os elementos

$$x_{2k-1} = \frac{-1}{2k}$$

formam uma subsequência de $\{x_n\}$ de todos termos negativos.

Teorema 1.2.2 Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, então $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ para qualquer subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$.

■ **Exemplo 1.7** Seja $x_n = \cos(\pi n)$. Considerando os índices pares $n_k = 2k$ temos $x_{n_k} = \cos(2\pi k) = 1$, logo $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 1$. Por outro lado considerando os índices impares $n_k = 2k-1$, temos $x_{n_k} = \cos(2\pi k - \pi) = -1$, ou seja $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} -1$. Portanto têm duas subsequências de $\{x_n\}$ que têm limites diferentes. Assim, pelo Teorema 1.2.2, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ não existe.

1.3 Propriedades dos limites

Teorema 1.3.1 Seja $f(x) : [q;\infty) \to \mathbb{R}$ uma função real ($q \in \mathbb{N}$). Definamos uma sequência $\{x_n\}$ com o termo geral dado por $x_n = f(n)$, $n \geq q$. Se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

(O resultado vale no caso $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ também).

Obs **Reciproca não é verdadeira!** Seja $f(x) = \text{sen}(\pi x)$. Temos que $\text{sen}(\pi n) \to 0$ (quando $n \to \infty$), mas o limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ não existe (desde que $f(2k+\frac{1}{2}) = \text{sen}(2\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$, quando $k \to \infty$).

■ **Exemplo 1.8** Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Solução. Tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}.$$

Seja $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, assim $x_n = f(n) = n^{\frac{1}{n}}$. Pelo Teorema 1.3.1 obtemos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$. Observe que $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Pela Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

;-)

Obs Observe que a regra de L'Hôpital é inaplicável para as sequências numéricas!

Tem-se as seguintes propriedades dos limites.

Propriedades:
Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Então:

1) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$;
2) $\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$;
3) $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$;
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, se $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

■ **Exemplo 1.9** 1) Usando as propriedades acima obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+n^3-3}{8n^5-2n^4+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^5}}{8-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^5}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^5})}{\lim_{n\to\infty}(8-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^5})}$$

$$=\frac{2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^5}}{8-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}}=\frac{1}{4}.$$

2)

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-\sqrt{n^4-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-\sqrt{n^4-1})\cdot(n^2+\sqrt{n^4-1})}{(n^2+\sqrt{n^4-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-(n^4-1)}{(n^2+\sqrt{n^4-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+\sqrt{n^4-1})}=0.$$

3) Calcule $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}bt^k$, se $0<t<1$, $b\neq 0$.

Solução.

$$\sum_{k=1}^{n}bt^k=bt\cdot\sum_{k=0}^{n-1}t^k=bt\cdot\frac{1-t^n}{1-t}.$$

Como $0<t<1$, $\lim_{n\to\infty}t^n=\lim_{x\to\infty}t^x=0$, portanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}bt^k=\lim_{n\to\infty}(bt\cdot\frac{1-t^n}{1-t})=\frac{bt}{1-t}.$$

;-)

Teorema 1.3.2 — Teorema do Confronto. Se $y_n\leq x_n\leq z_n$ para $n\geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=L,$$

então

$$\lim_{n\to\infty}x_n=L.$$

Obs O Teorema 1.3.2 aplica-se quando o Teorema 1.3.1 não funciona.

Corolario 1.3.3 Se $\lim_{n\to\infty}|x_n|=0$, então $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

Prova. De fato, $-|x_n|\leq x_n\leq|x_n|$, assim pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

Exemplo 1.10 1) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Solução. É fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^n}{n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

assim, pelo Corolário 1.3.3, temos $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. ;-)

2) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n}$.

Solução. Temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen} n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Logo, denotando $y_n = -\frac{1}{n}$, $x_n = -\frac{\operatorname{sen} n}{n}$ e $z_n = \frac{1}{n}$ e observando que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pelo Teorema 1.3.2 obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0.$$

;-)

3) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Solução. Seja $x_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}\right) \leq \frac{1}{n}$, então

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n},$$

e pelo Teorema 1.3.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

;-)

Exemplo 1.11 Estude convergência de $\{r^n\}$, $r \in \mathbb{R}$.

Solução. Vamos analisar todos os casos possíveis:

a) Se $r > 1$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{x\to\infty} r^x = \infty$.

b) Se $0 < r < 1$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{x\to\infty} r^x = 0$.

c) Seja $-1 < r < 0$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0.$$

Assim pelo Corolário 1.3.3 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ neste caso.

d) Seja $r < -1$. Para índices pares $n = 2k$ temos $\lim_{k\to\infty} r^{2k} = \infty$. Para índices impares $n = 2k+1$ temos $\lim_{k\to\infty} r^{2k} = -\infty$, assim $\{r^n\}$ diverge.

e) Seja $r = 0$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Seja $r = 1$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$. Se $r = -1$, assim $\{r^n\}$ diverge (analisando termos com índices pares e ímpares).

Então:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty, & r > 1, \\ 1, & r = 1, \\ 0, & |r| < 1, \\ \text{diverge}, & r \leq -1. \end{cases}$$

;-)

1.4 Video material complementar

Para aprofundar o conhecimento do tópico sugerimos assistir as seguintes aulas gravadas do Prof. Claudio Possani:

- Parte 1
- Parte 2
- Parte 3